Математика **8-М** **29.11.2023**

Урок 73-76

Тема: Функции, их свойства. Способы задания функций. Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Срок сдачи работы до 30.11.2023

Теоретическая часть:

1. Внимательно изучить материал учебника с.21-23, и стр.14-19
2. Внимательно просмотреть видеофрагмент по теме.
3. Изучить предложенный материал

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств. Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается y = f(x). Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

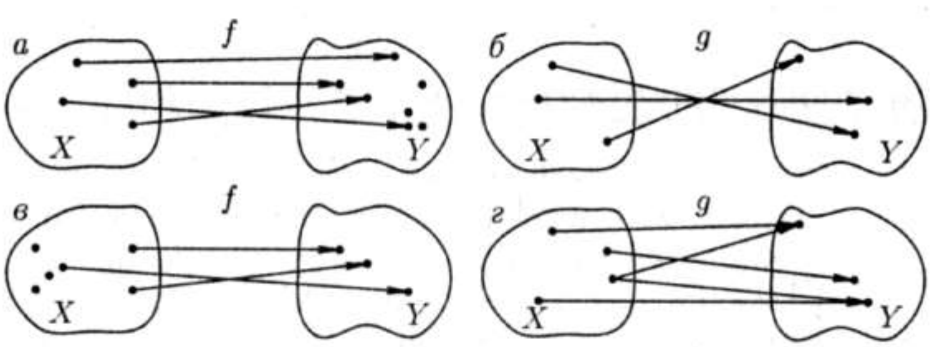


рис.1

Например, соответствия f и g, изображенные на рис.1 а и б, являются функциями, а на рис.1 в и г – нет. В случае в – не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае г не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается D(f) . Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается E(f).

б) Числовые функции. График функции. Способы задания функций.

Пусть задана функция $f: X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют ***числовой функцией***. Переменная x при этом называется *аргументом* или независимой переменной, а y – *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*.

Графиком функции y = f(x) называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию y = f(x), необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул, или уравнений.

Например,

$$1) S = \pi R^2; 2) y^2 - 4x = 0; 3) y = \begin{cases} x^2 + 1, x < 2 \\ x - 4, x \geq 2. \end{cases}$$

Если область определения функции y = f(x) не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию y = f(x).

Графический способ: задается график функции.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

в) Основные характеристики функции.

1. Функция y = f(x),определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и f(-x) = f(x); ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и f(-x) = -f(x).

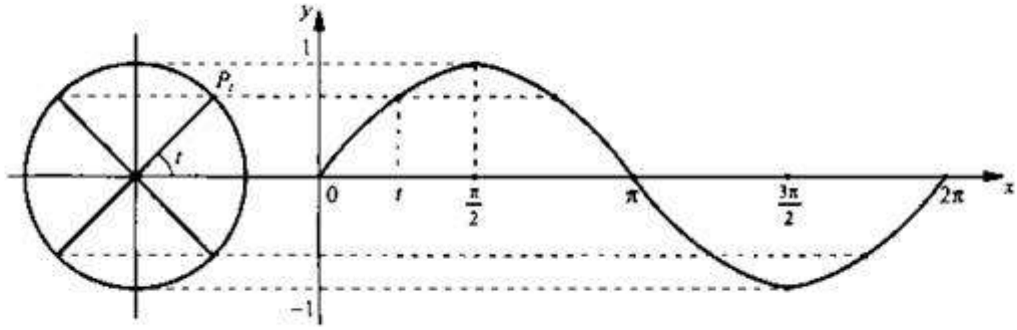
График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной – относительно начала координат. Например, $y = x^2, y = \sqrt{1+x^2}, y = \ln|x|$ – четные функции; а y = sinx, $y = x^3$ – нечетные; y = x-1, $y = \sqrt{x}$ – функции общего вида, т.е. не четные и не нечетные.

2.Пусть функция y = f(x) определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; если $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на D_1; $f(x_1) > f(x_2)$ то функция наз. ***убывающей*** на D_1; $f(x_1) \ge f(x_2)$ - ***невозрастающей***.

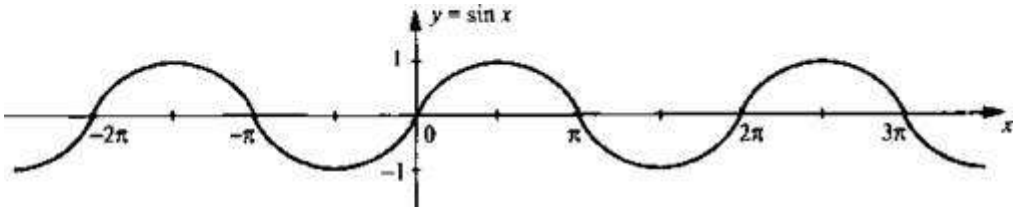
Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие – ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***.

1. Функция y = sin x, ее свойства и график

Обсудим построение графиков функций синуса и косинуса. Сначала построим график функции синуса на отрезке [0; 2π]. Отметим на оси ординат точки (0; -1) и (0; 1), на оси абсцисс - точку (2π; 0). Разделим отрезок [0; 2π] и единичную окружность на 8 равных частей (учтите, что длина отрезка [0; 2π] равна 2π ≈ 6,28). Каждая такая часть равна π/4. Для построения точки графика с абсциссой t используем определение синуса. Отметим точку Pt на единичной окружности и проведем через Pt прямую, параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этой прямой и прямой x = t искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки Pt и по определению sin t равен ординате точки Pt.



На рисунке приведено построение восьми точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке [0; 2π]. Для построения графика функции вне этого отрезка учтем периодичность функции синуса, т. е. sin (x + 2πn) = sin x (где n - произвольное целое число). Поэтому во всех точках x0 + 2пn (где 0 < x0 < 2π) значения синуса совпадают. Следовательно, график синуса на всей прямой получается из построенного графика с помощью параллельных переносов его вдоль оси абсцисс (вправо и влево) на 2π, 4π, 6π и т. д. График функции синуса называется синусоидой. Отрезок [-1; 1] оси ординат, с помощью которого находили значения синуса, иногда называют линией синусов.



Используя построенный график, приведем основные свойства функции y = sin x:

1. Область определения D(y) = (-∞; +∞).

2. Функция нечетная (т. е. y(-x) = -e(x))> и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция возрастает на отрезках вида $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ и убывает на отрезках вида $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, где k ∈ Z.

4. Функция ограничена, т. е. -1 ≤ y(x) ≤ 1.

5. Наименьшее значение функции $y_{наим} = -1$ (достигается в точках вида $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$) и наибольшее значение $y_{наиб} = 1$ (достигается в точках вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

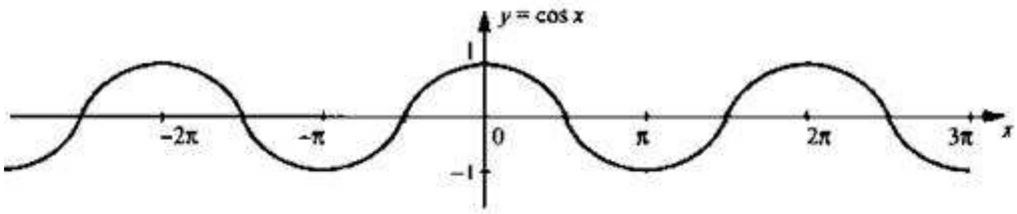
6. Функция непрерывная.

7. Область значений E(y) = [-1; 1].

8. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом T = 2п, т. е. y(x + 2пk) = y(x).

2. Функция y = cos x, ее свойства и график

Для построения графика функции косинуса учтем формулу приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$ Поэтому значение косинуса в любой точке x0 равно значению синуса в точке $x_0 + \frac{\pi}{2}.$ Тогда график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому график функции y = cos x также является синусоидой.



Перечислим основные свойства функции y = cos x:

1. Область определения D(y) = (-∞; +∞).

2. Функция четная (т. е. y(-x) = y(x)), и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Функция возрастает на отрезках вида [-π + 2πk; 2πk] и убывает на отрезках вида [2πk; π + 2πk], где k ∈ Z.

4. Функция ограничена, т. е. $-1 \le y(x) \le 1$.

5. Наименьшее значение функции $y_{наим} = -1$ (достигается в точках вида $x = \pi + 2\pi k$) и наибольшее значение $y_{наиб} = 1$ (достигается в точках вида $x = 2\pi k$).

6. Функция непрерывная.

7. Область значений $E(y) = [-1; 1]$.

8. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом $T= 2\pi$, т. е. $y(x + 2\pi k) = y(x)$.

Функция Y= tg X .

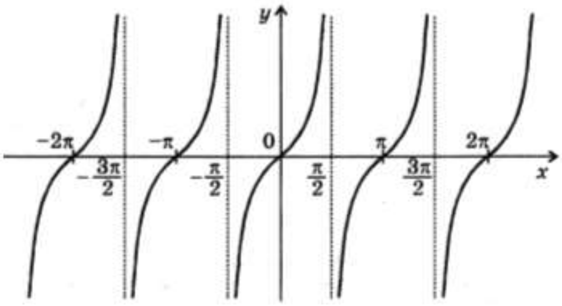


График тангенсоида.

Свойства функции:

1. область определения: объединение интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$$

2. область значения: R

3. чётность, нечётность: функция нечётная.

4. период: π

5. нули: $y = 0$ при $x = \pi n$, где n Z

6. промежутки знакопостоянства:

$$tgx > 0 \text{ при } x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$$

$$tgx < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right), n \in Z$$

7. экстремумов нет

8. промежутки монотонности: функция возрастает на каждом интервале области определения

Функция $Y = ctg\ X$.

График котангенсоида.

Свойства функции:

1. Область определения - множество всех действительных чисел $x \neq \pi n, n \in Z$
2. Множество значений - множество R всех действительных чисел
3. Функция $y = ctgx$ периодическая с периодом: π
4. Функция $y = ctgx$ нечётная
5. Функция $y = ctgx$ принимает:

- значение 0, при $x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$;
- положительные значения на интервалах $(\pi n;\ \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$;
- отрицательные значения на интервалах $(-\pi/2 + \pi n;\ \pi n)$, $n \in Z$.

6. Функция $y = ctgx$ убывает на интервалах $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$.

Домашняя работа.

Составить конспект опираясь на контрольные вопросы

1. Основные свойства и график функции $y = \sin x$.

2. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график.

3. Решение задач № 40а),43а)б)